XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 11 октября 2008.

Первый тур. Лига тактик

1. Рассмотрим $n = k(k+1)/2$ клеток доски $k \times k$, лежащих ниже или на диагонали, ведущей из левого нижнего угла в правый верхний. Сколько существует способов расставить в них числа от 1 до n (каждое по разу) так, что $M_1 < M_2 < \cdots < M_k$, где через M_i обозначено максимальное число в i-м столбце (содержащем i клеток)?

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Докажите, что

$$\frac{BI}{CI} \cdot \frac{ID}{IE} = \frac{AB}{AC}.$$

3. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите неравенство

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geqslant \frac{6}{ab+bc+ac}.$$

4. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Оказалось, что $AB^2 + AC^2 = 2AD^2$. Найдите угол между прямыми AD и BC.

5. Дано нечетное натуральное число c. Докажите, что оно является составным тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число $a \leqslant (c-3)/3$, что $(2a-1)^2 + 8c$ — точный квадрат.

6. Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ — вписанный четырехугольник. Точка F — проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Докажите, что проекции точки F на прямые AS, BS, CS и DS лежат на одной окружности.

7. Пять вершин правильного десятиугольника покрашены в красный цвет, а остальные пять в синий. Докажите, что найдутся два равных треугольника: один со всеми красными вершинами, а другой — со всеми синими.

8. Дано простое число $p \neq 3$. Известно, что $a+b$ делится на p, а a^3+b^3 делится на p^2. Докажите, что либо $a+b$ делится на p^2, либо a^3+b^3 делится на p^3.

9. Докажите, что квадратный трехчлен нельзя представить представить в виде суммы двух периодических функций.

10. В однокруговом турнире участвовало 30 теннисистов, каждый сыграл с каждым ровно один раз (ничьих в теннисе не бывает). Федя сосчитал количество способов построить их в шеренгу так, чтобы каждый (кроме последнего) выиграл у своего соседа справа. Могло ли у Феди получиться три способа?

XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 11 октября 2008.

Первый тур. Лига тактик

1. Рассмотрим $n = k(k+1)/2$ клеток доски $k \times k$, лежащих ниже или на диагонали, ведущей из левого нижнего угла в правый верхний. Сколько существует способов расставить в них числа от 1 до n (каждое по разу) так, что $M_1 < M_2 < \cdots < M_k$, где через M_i обозначено максимальное число в i-м столбце (содержащем i клеток)?

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Докажите, что

$$\frac{BI}{CI} \cdot \frac{ID}{IE} = \frac{AB}{AC}.$$

3. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите неравенство

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geqslant \frac{6}{ab+bc+ac}.$$

4. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Оказалось, что $AB^2 + AC^2 = 2AD^2$. Найдите угол между прямыми AD и BC.

5. Дано нечетное натуральное число c. Докажите, что оно является составным тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число $a \leqslant (c-3)/3$, что $(2a-1)^2 + 8c$ — точный квадрат.

6. Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ — вписанный четырехугольник. Точка F — проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Докажите, что проекции точки F на прямые AS, BS, CS и DS лежат на одной окружности.

7. Пять вершин правильного десятиугольника покрашены в красный цвет, а остальные пять в синий. Докажите, что найдутся два равных треугольника: один со всеми красными вершинами, а другой — со всеми синими.

8. Дано простое число $p \neq 3$. Известно, что $a+b$ делится на p, а a^3+b^3 делится на p^2. Докажите, что либо $a+b$ делится на p^2, либо a^3+b^3 делится на p^3.

9. Докажите, что квадратный трехчлен нельзя представить представить в виде суммы двух периодических функций.

10. В однокруговом турнире участвовало 30 теннисистов, каждый сыграл с каждым ровно один раз (ничьих в теннисе не бывает). Федя сосчитал количество способов построить их в шеренгу так, чтобы каждый (кроме последнего) выиграл у своего соседа справа. Могло ли у Феди получиться три способа?